Mathématiques pour la physique

1. On considère un cylindre de rayon de base R et de hauteur h ; fermé aux deux extrémités.
   (a) Quelle est l'aire totale du cylindre ?
   $$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$
   (b) On mesure R et h avec les incertitudes ΔR et Δh ; quelle est l'incertitude ΔS sur l'aire ?
   $$\begin{aligned} dS &= 2\pi\left(2R+h\right)dR + 2\pi R dh \\ \Delta S &\simeq 2\pi\left(2R+h\right)\Delta R + 2\pi R\Delta h \end{aligned}$$
   ou on aurait pu écrire
   $$\frac{\Delta S}{S} \simeq \frac{(2R+h)}{(R+h)}\frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{R+h}\Delta h$$
   (c) Un fabricant de boites de conserve veut obtenir un volume maximal pour une aire donnée ; quelle relation doivent alors vérifier R et h ?
   $$V = \pi R^2 h$$
   $$dV = 2\pi Rh dR + \pi R^2 dh$$
   Puisque S est une constante
   $$dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi\left(2R+h\right)dR + 2\pi R dh = 0$$
   $$\Rightarrow dh = -\left(2R+h\right)\frac{dR}{R}$$
   La variation du volume pour S constant est donc :
   $$\begin{aligned} dV &= 2\pi Rh dR - \pi R^2\left(2R+h\right)\frac{dR}{R} \\ &= \pi R\left[2h - (2R+h)\right]dR \\ &= \pi R\left[h - 2R\right]dR \end{aligned}$$
   On cherche un extrémum de V c.-à-d. $dV = 0$.donc il nous faut choisir les dimensions telle que
   $$h = 2R$$

2. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :
   (a) $g\left(x,y\right) = \ln\left|xy\right|$
   $$\frac{dg}{g} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$
   (b) $r\left(x,y,z\right) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   $$dr = \frac{xdx + ydy + zdz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

3. On considère une sphère de rayon a . La densité inhomogène de la sphère s'exprime $\varrho\left(r,\theta,\phi\right) = Cr\sin^2\theta$ où C est une constante. Quelle est la masse totale de la sphère ?
   $$M = \iiint_{V_{\text{sphère}}} \varrho\left(r,\theta,\phi\right)d\mathcal{V}, \qquad \text{avec} \qquad d\mathcal{V} = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi$$

En tenant compte des limites d'intégration :

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{V_{\text{sphère}}} \varrho(r,\theta,\phi)\, d\mathcal{V} = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Cr\sin^2\theta \\
&= C\int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi C \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

Avec le changement de variable $u=\cos\theta$, on a $du=-\sin\theta d\theta$ et

$$
\begin{aligned}
M &= 2\pi C \int_0^a r^3 dr \int_{-1}^1 \left(1-u^2\right) du \\
&= 2\pi C \int_0^a r^3 dr \left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 = 2\pi C\frac{4}{3}\int_0^a r^3 dr = \frac{8}{3}\pi C\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \\
&= \frac{2}{3}\pi C a^4
\end{aligned}
$$

4. Soit un triangle rectangle d'hypothénuse H et de coté l et L. On mesure les longueurs des deux cotés $H=15$cm et $L=7$cm avec des incertitudes $\Delta H=\Delta L=0,1$cm.

   (a) Exprimer la longueur l du troisième côté en fonction de H et L. Donner les expressions de dl et Δl et donner la valeur numérique de Δl.

$$
l=\left(H^2-L^2\right)^{1/2}=4\sqrt{11}\simeq 13,27\text{cm}
$$

$$
\begin{aligned}
dl &= \frac{H}{\left(H^2-L^2\right)^{1/2}}dH-\frac{L}{\left(H^2-L^2\right)^{1/2}}dL \\
&= \frac{H}{l}dH-\frac{L}{l}dL
\end{aligned}
$$

$$
\Delta l=\left|\frac{\partial l}{\partial H}\right|\Delta H+\left|\frac{\partial l}{\partial L}\right|\Delta L=\left(\frac{15}{l}+\frac{7}{l}\right)\Delta L\simeq 0,166\text{cm}
$$

   Ce n'est pas demandé mais on voit avec un calcul exacte que :

$$
\begin{aligned}
l_{\max} &= \left((H+\Delta H)^2-(L-\Delta L)^2\right)^{1/2}\simeq 13,431\text{cm} \\
l_{\min} &= \left((H-\Delta H)^2-(L+\Delta L)^2\right)^{1/2}\simeq 13,100\text{cm} \\
l_{\max}-l &\simeq 0,164\text{cm} \qquad l-l_{\min}\simeq 0,167\text{cm}
\end{aligned}
$$

   ce qui confirme le bien fondé de notre analyse.

   (b) On appelle α l'angle entre les cotés l et H. Donner l'expression de $d\alpha$ et Δa respectivement en fonction de dL, dH et ΔL, ΔH et calculer $\Delta\alpha$.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{L}{H}\Rightarrow \operatorname{Arc}\sin\frac{L}{H}=0.486\text{rad}=27.8^\circ \\
\cos\alpha &= \frac{l}{H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha d\alpha &= \frac{dL}{H}-\frac{L}{H^2}dH \\
&\Rightarrow d\alpha=\frac{L}{l}\left(\frac{dL}{L}-\frac{dH}{H}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Delta\alpha=\frac{L}{l}\left(\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta H}{H}\right)=0,011\text{rad}=0,6^\circ
$$

(c) Donner l'expression de $d\alpha$ en fonction de dl et dH. Prenons l comme la quantité mesurée et calculer maintenant Δa si $\Delta l = \Delta H = 0,1$cm. Comparer cette valeur avec celle trouvée en (b).

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{l}{H} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\cos\frac{l}{H} = 0.486\text{rad} = 27.8^\circ \\
-\sin\alpha d\alpha &= \frac{1}{H}dl - \frac{l}{H^2}dH \qquad \sin\alpha = \frac{L}{H} \\
\Rightarrow d\alpha &= \frac{l}{L}\left(\frac{dH}{H} - \frac{dl}{l}\right)
\end{aligned}$$

$$\Delta\alpha = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta l}{l}\right) = 0,027\text{rad} = 1.54^\circ$$

(d) La valeur de $\Delta\alpha$ trouvée de (c) n'est pas le même que celui trouvé en (a) puisque les quantités mésurées ne sont pas les mêmes. Montrer qu'on peut retrouver l'expression pour dl trouvée en (b) en utilisant l'expression pour $dl(L,H)$ trouvée en (a) dans l'epxression pour $d\alpha\,(l,H)$ trouvée en (c).

On se rappel que $\frac{dl}{l} = \frac{H}{l^2}dH - \frac{L}{l^2}dL$

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \frac{l}{L}\left(\left(\frac{1}{H} - \frac{H}{l^2}\right)dH + \frac{L}{l^2}dL\right) \\
&= \frac{l}{L}\left(\left(\frac{l^2 - H^2}{l^2 H}\right)dH + \frac{L}{l^2}dL\right) \\
&= \frac{1}{lL}\left(\left(\frac{H^2 - L^2 - H^2}{H}\right)dH + LdL\right) \\
&= \frac{L}{l}\left(\frac{dL}{L} - \frac{dH}{H}\right)
\end{aligned}$$

5. Les formes différentielles suivantes sont-elles des différentielles totales ? Si oui donner les fonctions dont elles sont les différentielles :

(a) $(xy - 1)\,dx + \left(x^2 - xy\right)dy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - y$$

Donc ce n'est pas une différentielle exacte.

(b) $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + (x - y)\,dy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Donc il s'agit d'une différentielle exacte et :

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + (x - y)\,dy = 0$$

a pour solution

$$f(x,y) = \int\left(y - \frac{1}{x}\right)dx = xy - \ln x + g(y)$$

Ensuite, on chosit $g(y)$ afin que $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = N$:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = N(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) &= x + g'(y) = (x - y) \\
&\Rightarrow g'(y) = -y \\
&\Rightarrow g(y) = -\frac{y^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Donc, la solution de l'équation différentielle est :

$$f(x,y) = xy - \ln x - \frac{y^2}{2} + C = 0$$

On vérifie ce résultat en calculant df :

$$df(x,y) = \left(y - \frac{1}{x}\right) dx + (x - y)\, dy = 0$$

(c) Démontrer que $\frac{2y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy$ n'est pas une différentielle totale.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x^2} \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

(d) Démontrer que facteur intégrant $\mu(x) = x^3$ peut faire en sorte que l'équation

$$\mu(x)\frac{2y}{x^2}dx + \mu(x)\frac{1}{x}dy = 0$$

deviennet une équation différentielle exacte.
Avec le facteur intégrant, notre équation devient :

$$x^3\frac{2y}{x^2}dx + x^3\frac{1}{x}dy = 0 = 2yxdx + x^2dy = 0$$

ce que est est une différentielle exacte puisque :

$$M = 2yx \qquad N = x^2$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En intégrant

$$f(x,y) = \int (2yx)\, dx = yx^2 + g(y)$$

Ensuite, on chosit $g(y)$ afin que $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = N$:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx^2 + g(y)\right) = x^2 + g'(y) = N = x^2$$
$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

6. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx$$
$$\ln y = x^2 + C'$$

Solution :

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{x^2+C'} = e^{C'}e^{x^2} = Ce^{x^2}$$
$$\Rightarrow y = C\exp x^2$$

Vérification en prenant la dérivée des deux cotés :

$$y' = 2xC\exp x^2 = 2xy$$